

## 1er Devoir surveillé

### Exercice 1 (4 Points).

1. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), \left[ (x \neq y) \wedge (xy \neq 1) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \neq \frac{\sqrt{y}}{y + \sqrt{y} + 1} \right].$$

2. Montrer que

$$(a) 1(3 \times 1 + 1) + 2(3 \times 2 + 1) + 3(3 \times 3 + 1) + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2, (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

### Exercice 2 (4 Points).

1. Soient  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^+$  tels que  $a + b = 0$ , montrer par l'absurde que  $a = 0$  et  $b = 0$ .

2. En déduire les solutions des deux équations suivantes :

$$(a) x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

$$(b) \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 + 2} = 0$$

### Exercice 3 (6 Points).

Soient  $f$  une fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 2}$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- (b) Montrer que  $f$  est majorée par 1.
- (c) Montrer que  $f$  admet une valeur minimale en  $a = \frac{1}{2}$ .
2. On considère la fonction numérique  $h$  définie par

$$h(x) = \frac{x}{x + 2}$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de  $h$ .
- (b) Étudier la variation de  $h$  sur  $D_h$ .
- (c) En déduire la variation de  $f$  sur  $D_f$ .

### Exercice 4 (6 Points).

On considère les deux fonctions numériques  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{2-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{3}x^3$$

1. Dresser le tableau de variation de  $f$  et  $g$ .
2. Résoudre dans  $]-\infty, 2[$  l'équation  $f(x) = 0$ , en déduire une interprétation géométrique du résultat.
3. Tracer les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans un même repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
4. Déterminer graphiquement l'ensemble de solutions de l'inéquation sur  $\mathbb{R}^* \setminus \{2\}$

$$\frac{3(x-1)}{x^2} \leq x(2-x).$$

(On admet que  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $\alpha < \beta$  sont les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$ .)

**1 point supplémentaire sur la bonne présentation de la copie**